Última actualización: 12 de marzo de 2021

Cálculo diferencial e integral IV
Tarea 01

Indicaciones: Resuelve exactamente 4 ejercicios de cada sección.

Sección 1

1. Demuestre, usando los axiomas de campo de $\mathbb{R}$ o las propiedades de campo vistas en clase, que:
   a) Si $ax = a$ con $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
   b) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
   c) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
2. Si $b \neq 0$, el símbolo $\frac{a}{b}$ significa $a \cdot b^{-1}$. Demuestra que:
   a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.
   b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$.
   c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$.
   d) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$.
3. Demuestre, usando los axiomas de orden de $\mathbb{R}$ o las propiedades de orden vistas en clase, que:
   a) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
   b) Si $a < b$, entonces $-a > -b$.
   c) Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.
   d) Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.
4. Halle todos los números x que satisfacen:
   a) $10 - x > 2 - 3x$
   b) $(x - 4)(x + 2) \leq 0$
   c) $7x^2 - x \geq 2x + 2 - 7x^2$
   d) $1 < \frac{1}{x(x-1)}$

   Argumente sus respuestas.
5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que:
   a) $\sqrt{a^2} = |a|$
   b) $|ab| = |a||b|$
   c) Si $b \neq 0$, $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$
   d) Si $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
   e) $|a| - |b| \leq |a - b|$ y de aquí concluya que $||a| - |b|| \leq |a - b|$

6. Halle todos los números x que satisfacen:
   a) $|x-9| > 7$
   b) $1 \leq |x-2| < 7$
   c) $1 < \frac{1}{|x-2|} \leq 4$

   Argumente sus respuestas.

Sección 2

1. Demuestre, usando el principio de inducción matemática, que
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
para todo número natural n.
2. Demuestre, usando el principio de inducción matemática, que todo número natural es par o impar.
3. Demuestre, usando el principio de inducción matemática, que
$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$
para todo número natural n, donde F_n, denota el n-ésimo número de Fibonacci (vea Clase 06).
4. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales que satisface
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 1 - \frac{1}{a_n},$$
para todo número natural n. Demuestre, usando el principio de inducción matemática, que $a_n = 2^n$ para todo número natural n.
5. Demuestre que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales.
6. Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ y $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son irracionales.